

Construction d'un cadran solaire par la géométrie

Suite aux questions posées le 2 août, voici quelques éléments supplémentaires pour construire son propre cadran solaire

Choix de la date de la mesure – Tables des déclinaisons et de l'équation du temps

Il y a deux jours de choix dans l'année pour faire les mesures, ce sont ceux des équinoxes, soit les 21 mars et 23 septembre. En effet ce jour-là le soleil suit une trajectoire qui est exactement dans le plan équatorial, les extrémités des ombres s'alignent sur une droite tout au long de la journée et on verra surtout que le positionnement de l'aiguille est grandement simplifié. Mais la mesure reste possible à n'importe quelle date. Cependant on a besoin de connaître la déclinaison terrestre le jour de la mesure.

La déclinaison de la terre

La déclinaison est l'angle que fait le plan équatorial avec la ligne sous laquelle on voit le soleil. Cet angle vaut $23,44^\circ$ au solstice d'été, le 21 juin, il vaut $-23,44^\circ$ au solstice d'hiver, le 22 décembre et bien sûr 0° les 21 mars et 23 septembre, jours des équinoxes. La déclinaison est donc positive l'été pour nous. Une table est jointe en annexe.

L'équation du temps – Relation entre heure légale et heure solaire

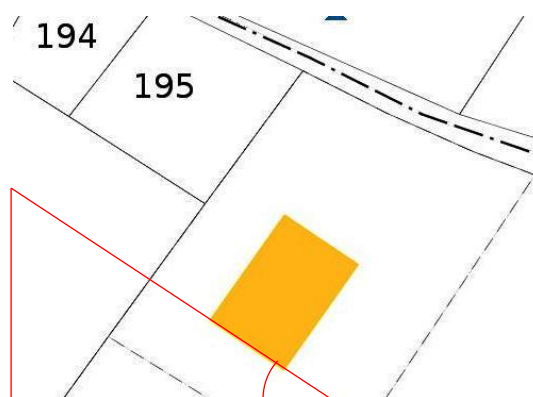
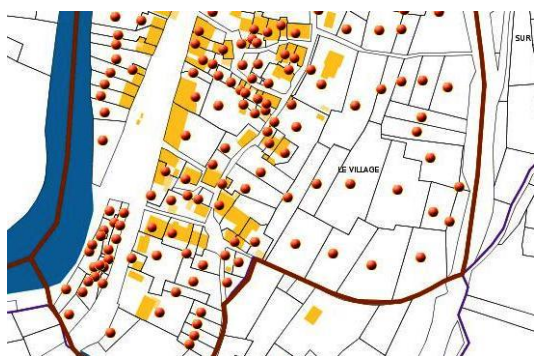
Le souhait de quelques-uns étant de graduer son cadran en heures de la montre, il est nécessaire de connaître les relations entre l'heure solaire et l'heure légale. Voir le développement en annexe qui aboutit à ce résultat, avec :

hl : heure légale nette
 hl(s) : heure légale (du soleil) celle qui est donnée par le cadran solaire gradué en heures légales
 hs : heure solaire vraie
 E : équation du temps (correction fine en fonction de la date, donnée en annexe)

Pour le Freney l'hiver	hl = hs + 0:35:30 + E	hl(s) = hs + 0:35:30
Pour le Freney l'été	hl = hs + 1:35:30 +E	hl(s) = hs + 1:35:30

Repérage du « méridien de la table du cadran », l'axe de symétrie du dessin

La méthode est applicable pour tout type de table de cadran, horizontale, verticale (plein sud ou déclinante) ou même inclinée dans n'importe quelle sens. L'explication est appuyée sur un exemple semi concret. Imaginons que Lionel souhaite faire un cadran vertical sur le mur sud-sud-ouest de sa maison. A partir du plan cadastral, la déclinaison de ce mur est $33,5^\circ$ à l'ouest (positif).



Préparation du matériel

En partant par exemple d'un format A3, bien plan et bien rigide, il nous faut installer un dispositif pour produire une ombre. Quel que soit la tige, il nous faut surtout un point. L'auteur aime bien l'œilleton, une rondelle de diamètres par exemple 4x8 qui sera parallèle à la table. L'objectif est de bien repérer l'axe de la tâche de soleil dont les bords sont flous. En effet le soleil n'est pas un point, c'est un gros volume. L'ombre d'un point n'est pas un point, mais une tâche floue. Pour positionner cet objet, quand on ne sait pas, il faut tâtonner. Pour le mur ci-dessus, une première série de mesures est proposée avec l'œilleton à 75 mm de la table. On appelle A ce point pris au centre de la rondelle. Sa projection sur la table est H (pour le repérage se servir d'un volume cubique). L'œilleton doit être positionné de telle manière que H soit à 167 mm du bord gauche et à 9 mm du bord supérieur. La table doit être positionnée sur le mur d'une manière représentative du futur cadran (en particulier si le mur n'est pas parfaitement plan) avec les bords haut et bas bien horizontaux. Coller un papier sur la table pour pouvoir écrire. Prêt pour une mesure.

Mesures

Il s'agit simplement de tracer les points de passage de l'ombre tout au long de la journée. Si la mesure du mur de Lionel est faite le 15 août, et si le plan du cadastre n'est pas trop mauvais, on devrait obtenir la série de points suivante, données par rapport au point H :

Heure	12:27	13:10	13:50	14:36	15:19	16:02	16:45	17:28	18:10	18:55	19:40	20:20
Abscisse	-166	-81	-41	-11	11	30	49	69	92	124	173	252
Ordonnée	-263	-179	-141	-115	-99	-86	-75	-66	-57	-46	-33	-14

Les mesures devraient être plus précises avec une lumière moins rasante, en augmentant la distance de A par rapport à la table. Mais bien sûr cela restreint l'étendue des heures balayées. En prenant par exemple AH = 150 mm, avec le point H situé à 124 mm du bord gauche et 16 mm du bord supérieur toujours dans le format A3, on devrait obtenir les points suivants :

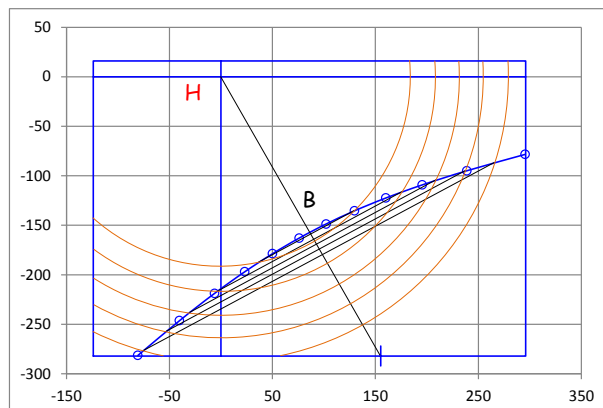
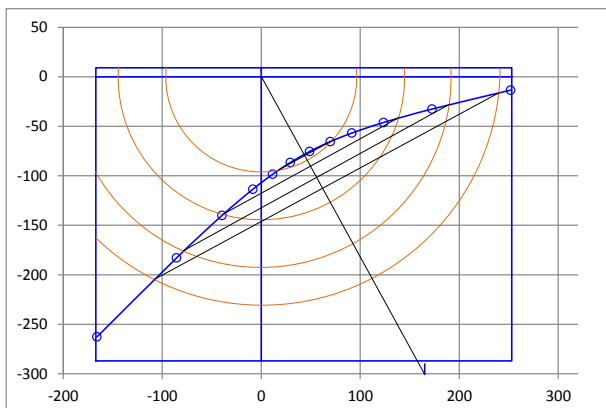
Heure	13:51	14:20	14:50	15:20	15:50	16:20	16:50	17:20	17:50	18:20	18:50	19:20
Abscisse	-81	-40	-6	23	50	76	102	130	160	196	239	295
Ordonnée	-281	-246	-219	-197	-179	-163	-149	-135	-122	-109	-95	-78

La suite des opérations est :

- Tracer l'arc diurne, la courbe qui passe par les points, trajet de l'ombre de l'œilleton au cours de la journée.
- Tracer quelques cercles concentriques ayant pour centre le point H

- Rejoindre les couples des intersections de la courbe des ombres avec chaque cercle
- Tracer la médiatrice commune à tous les segments de droite. Elle passe par H

Cette médiatrice est l'axe de symétrie du dessin, la position du plan du méridien parfaitement orthogonal au plan du mur, au cadran solaire en cours de réalisation.

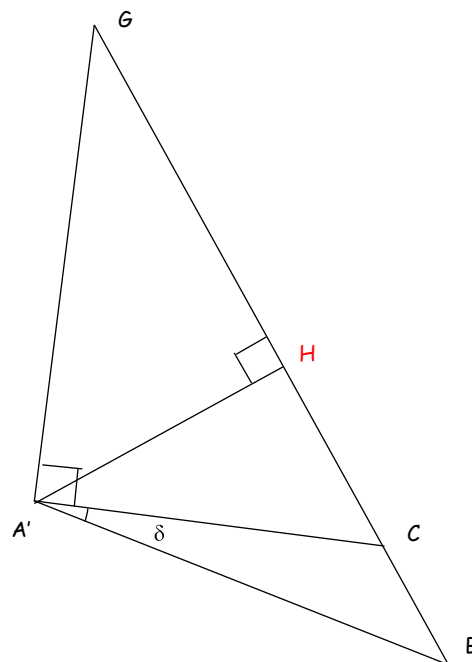


Recherche de la racine de l'aiguille

On a besoin de travailler maintenant dans le plan méridien défini ci-dessus. Ce plan est en l'air et pour faciliter les choses, on va le rabattre sur la table, par exemple à gauche, par pliage autour de l'axe. En particulier le point A est rabattu en A', situé sur la droite perpendiculaire à la médiatrice et à une distance $A'H = AH$. Si on appelle B le point d'intersection de la médiatrice avec la courbe des ombres, (à midi solaire), le rayon lumineux suit AB. Sur le plan rabattu, ce trajet lumineux est A'B.

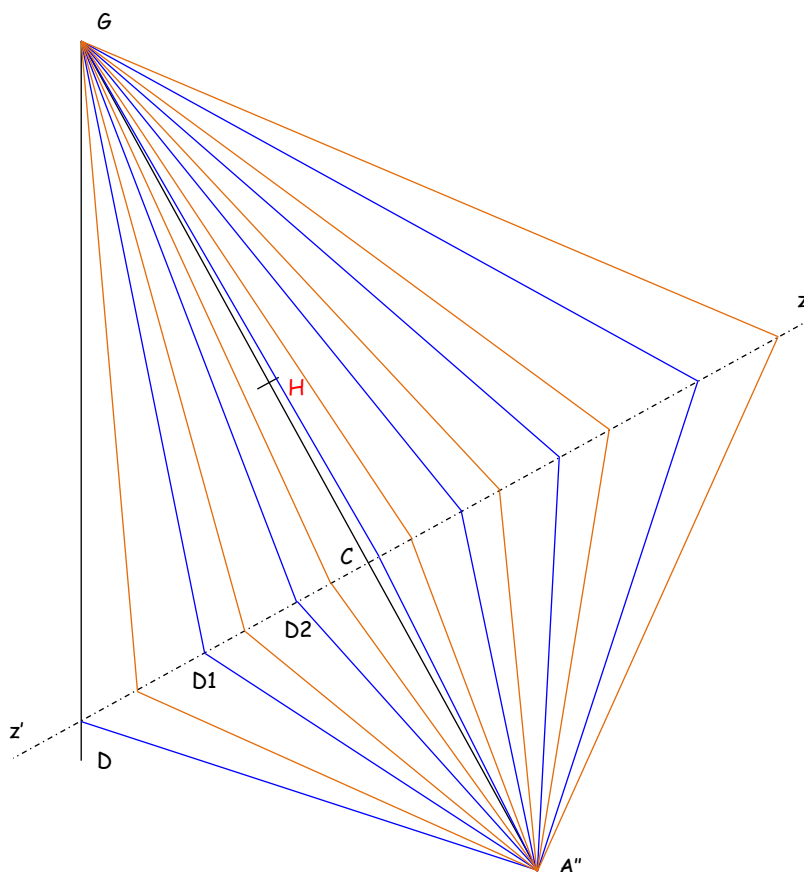
Il nous faut maintenant retrouver le point C qui représente l'extrémité de l'ombre sur cet axe le jour des équinoxes. Il est évident que si la mesure est faite le jour des équinoxes C est directement en B. Mais on dehors des équinoxes, l'angle BAC est justement celui de la déclinaison terrestre le jour de la mesure. Pour notre exemple du 15 août, la déclinaison est de $13,95^\circ$.

Un rapporteur de grande taille nous permet de tracer cet angle BAC avec une précision correcte (à défaut de trigonométrie). A'C est dans le plan équatorial, l'aiguille parallèle à l'axe des pôles doit être perpendiculaire. On trace donc A'G perpendiculaire à A'C qui rencontre la table en G. G est le point recherché racine de notre aiguille GA' qu'il faudra bien sûr relever en GA.



Tracé des graduations

On a vu le 2 août que pour les graduations des heures il faut se servir du plan équatorial. Le plan équatorial est en AC et il est perpendiculaire à l'axe de symétrie du dessin (la médiatrice du début). On va donc faire un deuxième rabattement autour d'une droite z'z qui passe par C et qui est perpendiculaire à GC. Le point A extrémité de l'aiguille se retrouve en A". Attention la longueur CA" est égale à CA' à prendre sur le dessin précédent (report par compas). Il suffit maintenant de tracer les heures de ce plan équatorial de 15 en 15°, à condition de bien démarrer, suivant le type de cadran solaire à réaliser.



Recherche de l'origine des heures pour un cadran gradué en heures solaires

Pour un cadran gradué en heures solaires, l'origine est le midi solaire. Le midi solaire de ce cadran vertical déclinant est sur la verticale abaissée du point G. Elle rencontre la droite de pliure z'z en D. Sur le plan équatorial l'ombre de midi poursuit son chemin vers la racine de l'aiguille du cadran équatorial, c'est-à-dire le point A". On a donc notre ombre de midi en DA". La suite de la graduation est simple, et toujours de 15 en 15°. Les graduations du plan équatorial rencontrent la droite de pliure z'z en des points D1 D2 etc. Les graduations du cadran vertical sont les droites GD1, GD2 etc. Tracé en bleu.

Recherche de l'origine des heures pour un cadran gradué en heures légales

Été ou hiver, il faut choisir (mais les graduations restent les mêmes). Le point de repère est le même qu'au paragraphe précédent, c'est-à-dire A"D, sauf que ce n'est pas midi mais :

$$hl = hs + 1:35:30 + E \text{ (l'été)}$$

Le 15 août $E = 4,47 \text{ mn} = 4:28$

$$hl = hs + 1:39:58$$

La graduation la plus proche est 14 heures située 20 minutes et 2 secondes après le midi solaire, ou 0,3339 heures décimales. L'angle correspondant dans le plan équatorial est :

$$15 * 0,3339 = 5,008^\circ$$

La graduation 14 heures est donc située $5,008^\circ$ après A"D. Il ne reste plus qu'à faire les angles de 15 en 15° puis rejoindre les D1 D2 D3 ... à G. Tracé en couleur brique.

L'illustration suivante montre ce qu'on devrait obtenir

Exemple d'un cadran solaire « multi-gradué »

Le cadran suivant est celui qu'on devrait retrouver sur le mur sud-sud-ouest de Lionel.

Il comprend trois sortes de graduations.

Graduation en heures solaires

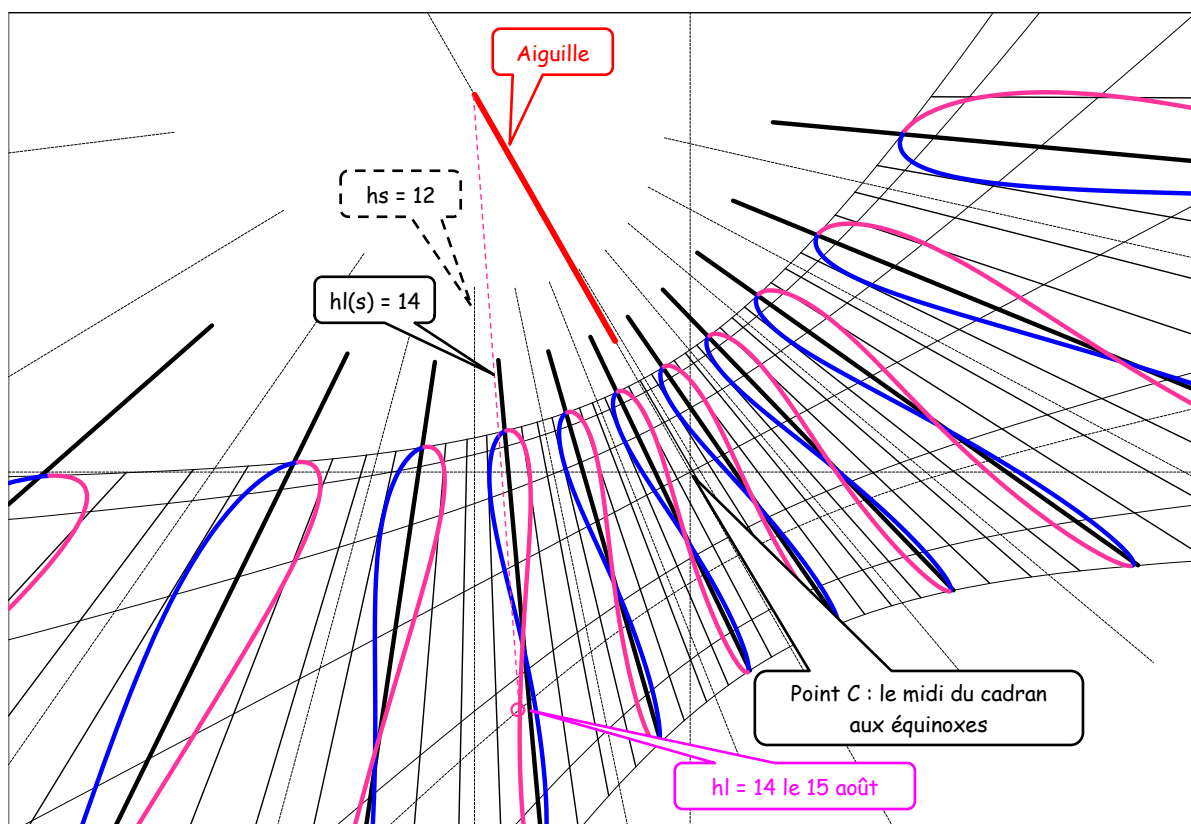
Les tirets fins représentent les heures solaires. Seules les heures sont représentées.

Graduation en heures légales (du soleil)

Les traits continus noirs sont ceux des heures légales. La graduation est faite de quart d'heure en quart d'heure. Attention c'est une heure légale batarde qui ne tient pas compte de la valeur de E. C'est une heure légale (du soleil), hl(s).

Graduation en heures légales véritables

Il faut se servir des courbes colorées. Les courbes bleues sont à utiliser du 22 décembre au 21 juin et les roses du 21 juin au 22 décembre. Ici, il ne faut regarder que l'extrémité de l'ombre de l'aiguille. L'arc diurne du 15 août a été ajouté en tirets noirs. C'est sur cette ligne que se retrouvent les points qui ont été notés le 15 août lors de la mesure du mur. Il y a un exemple pour 14 heures en heures d'été en pointillés roses.



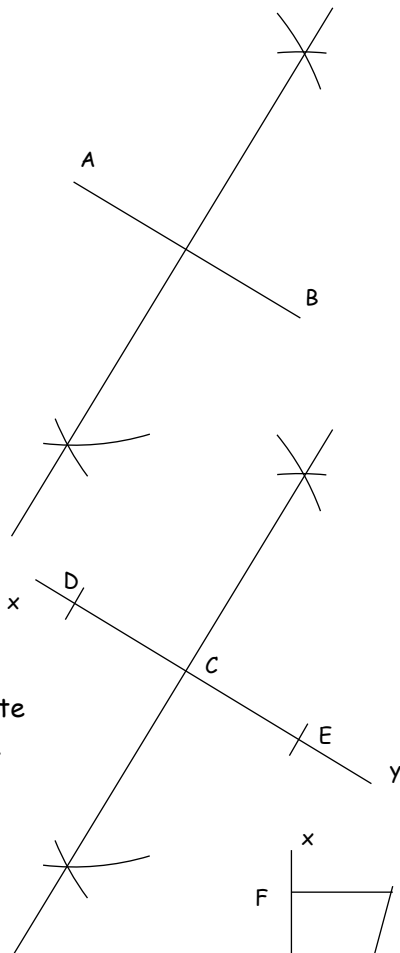
Annexe 1

Quelques notions élémentaires de géométrie

Un bon dessin géométrique repose sur la finesse du trait. Il nous faut donc un crayon fin, un compas, une règle graduée.

Tracé de la médiatrice d'un segment

Ouvrir le compas à environ la longueur du segment. A partir des deux extrémités A et B du segment, tracer de petits arcs de cercle qui se croisent. La médiatrice est la droite qui joint les intersections des arcs comme montré sur le schéma.



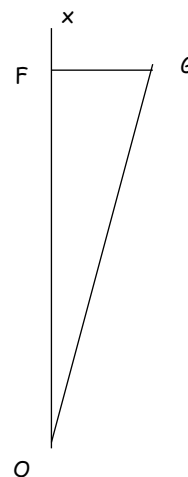
Tracé d'une perpendiculaire

Soit une droite xy et un point C de cette droite. Avec le compas reporter deux longueurs identiques CD et CE de part et d'autre de C. Puis procéder au tracé de la médiatrice de DE.

Tracé d'angles

En absence de rapporteur, on peut tracer des angles à l'aide d'une règle graduée, en se servant de la tangente trigonométrique qui est donnée par les calculatrices scientifiques. On peut trouver aussi les tangentes avec Excel, mais attention, Excel ne sait travailler qu'avec des angles exprimés en radians. A partir d'un angle en degrés pour avoir l'équivalent en radians il faut multiplier par pi et diviser par 180.

Par exemple pour tracer un angle de 15° , il faut chercher la valeur de la tangente de 15° . Cette valeur est : 0,267949. A partir d'un des côtés Ox de l'angle, on reporte une longueur OF de par exemple 100 mm. A l'extrémité F de cette longueur de 100 mm on trace une perpendiculaire. Sur cette perpendiculaire on mesure un segment FG de $100 \times 0,267949 = 26,8$ mm. L'angle FOG a une valeur de 15° .



Quelques tangentes

Tangente (5,008333)	= 0,087635	Tangente (45)	= 1,000000	
Tangente (15)	= 0,267949	Tangente (60)	= 1,732051	= 1 / tangente (30)
Tangente (30)	= 0,577350			

Annexe 2

Relations entre heure légale et heure solaire

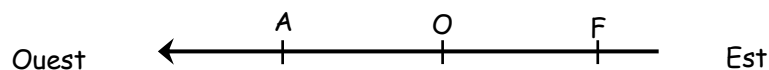
Trois paramètres interviennent : 1 - la longitude - 2 - la règle française des heures d'été et d'hiver - 3 - l'équation du temps (définie plus bas). Dans les relations, on fait très souvent des erreurs de signe. Pour l'expression de E, équation du temps, la convention française est de prendre l'heure solaire comme référence (les Américains prennent l'élément stable, l'heure solaire moyenne - le E des Français est l'opposé -E des Américains - faire très attention à l'origine des tables). Donc on exprimera l'heure de la montre, l'heure légale, en fonction de l'heure solaire.

Effet de la longitude et heure légale française

Le système des fuseaux horaires a été mis en place pour uniformiser l'heure dans chaque pays (sauf pour les grandes nations qui ont plusieurs fuseaux sur leur territoire). Dans toute la largeur d'un même fuseau, l'heure est identique. La France est assez bien localisée sur le fuseau noté 12h sur la figure de droite, fuseau qu'on pourrait appeler n° 0. Mais nous faisons partie de l'Europe Occidentale, nous avons un fuseau commun avec l'Allemagne, l'Italie, l'Espagne ... c'est le fuseau noté 13 heures, qu'on pourrait appeler +1, car nous avons une heure de plus que dans le fuseau n° 0.



Les longitudes vont de -180 à $+180^\circ$ en passant par 0 au centre du fuseau n° 0 (celui de 12h). L'axe des longitudes est orienté de droite à gauche (longitudes positives à l'ouest).



Soit un point A de longitude positive λ_A donc situé à l'ouest de O (origine), mais toujours dans le fuseau n° 0. Lorsque le soleil est en O il est midi en O, lorsque le soleil est en A il est midi en A. Avec λ_A en degrés, le temps écoulé en heures entre le passage en O et le passage en A est $\lambda_A/15$ (le soleil parcourt 15° de longitude par heure = $360/24$). Donc lorsque le soleil est en A, l'heure solaire en O qui est aussi l'heure de tout le fuseau, est midi + $\lambda_A/15$. Donc, pour A et d'une manière générale pour tous les points de longitude λ : Heure légale - heure solaire = $\lambda/15$

F représente le Freney d'Oisans dont la longitude est négative (le soleil passe sur le Freney avant d'arriver en O).

En France, notre heure légale uniforme pour tout le pays est celle du soleil prise en O, à laquelle il faut ajouter 1 heure l'hiver et 2 heures l'été. Exemple : lorsqu'il est 10 heures solaires en O, cela veut dire que le soleil a encore 30° de longitude à parcourir avant d'arriver en O, le soleil est donc sur le méridien de longitude -30° . A ce moment-là, il est 11 heures en France l'hiver ($10+1$) et midi en France l'été ($10+2$).

Il y a une deuxième façon de raisonner qui consiste à dire que l'hiver, en France, notre méridien de référence est le méridien de longitude -15° , tandis que l'été c'est celui qui a la longitude -30° . En France, l'été, notre heure légale est celle du soleil prise sur le méridien de longitude -30° .

Effet de l'équation du temps

E est une dernière correction relative à la durée du jour solaire réel qui n'est pas uniforme. La terre tourne très régulièrement, mais à cause de - 1 - l'orbite légèrement elliptique autour du soleil qui produit une accélération au périhélie - 2 - le basculement saisonnier (déclinaison) - la correction E est environ de plus ou moins un quart d'heure suivant la date. E est défini comme la différence entre une heure solaire « moyennée » et l'heure solaire réelle. Voir sa valeur dans la table qui suit.

Mise en équations

h _{lb}	: heure légale brute (avant la correction avec t _c)	
h _{sm}	: heure solaire moyenne	$h_{lb} = h_{sm} + \lambda/15$
t _c	: terme correctif pour la France	t _c = 1 l'hiver t _c = 2 l'été
h _l	: heure légale nette	$h_l = h_{lb} + t_c = h_{sm} + \lambda/15 + t_c$
E	: équation du temps	varie chaque jour - voir la table qui suit
h _s	: heure solaire vraie	$h_{sm} = h_s + E$
		$h_l = h_s + \lambda/15 + t_c + E$

Facile à retenir (toujours des plus), à condition de - 1 - bien exprimer l'heure légale en fonction de l'heure solaire - 2 - bien respecter le signe de λ qui est négatif à l'est, donc en particulier pour le Freney d'Oisans.

Suivant la 2^{ème} façon de raisonner en utilisant le méridien de référence λ_0 :
(avec $\lambda_0 = -15^\circ$ l'hiver et $\lambda_0 = -30^\circ$ l'été) **$h_l = h_s + (\lambda - \lambda_0)/15 + E$**

Pour le Freney d'Oisans

Sur la carte IGN n° 3335 ET le Freney d'Oisans est situé entre les méridiens de longitudes 4,20 et 4,30 grades à l'est de Paris. La distance entre ces deux méridiens est 283 mm. La distance entre le méridien 4,20 et le Freney est 27 mm. Par interpolation linéaire on obtient :

$$4,2 + 0,1 * \frac{27}{283} = 4,2095$$

Soit en degrés : $-4,2095 * 0,9 = -3,789$ par rapport à Paris

Paris est aussi à 2,337 degrés à l'est du méridien origine des heures, d'où :

Longitude du Freney : $-3,789 + (-2,337) = -6,126$ degrés

$\lambda/15 = -6,126 / 15 = -0,4084 =$ moins 24 minutes et 30 secondes

L'hiver	$\lambda/15 + t_c = 1 - 0,4084 = 0,5916 = 35 \text{ mn et } 30 \text{ s}$
L'été	$\lambda/15 + t_c = 2 - 0,4084 = 1,5916 = 1:35:30$

Pour le Freney l'hiver **$h_l = h_s + 0:35:30 + E$**

Pour le Freney l'été **$h_l = h_s + 1:35:30 + E$**

A noter qu'un cadran solaire peut être gradué en heures solaires, c'est sa fonction première. On peut aussi le graduer en heures légales, mais attention, cela ne peut pas être exactement l'heure légale, puisqu'on ne peut intégrer la correction E dans le cadran traditionnel. Le cadran solaire donnera une heure légale du soleil hl(s) qui gardera en elle la légère dérive saisonnière de l'heure solaire vraie hs.

Pour le Freney l'hiver

$$hl(s) = hs + 0:35:30$$

Pour le Freney l'été

$$hl(s) = hs + 1:35:30$$

Tables de la déclinaison et de l'équation du temps

Ce sont des valeurs moyennes calculées pour les 4 années 2011 à 2014 à partir du formulaire de Denis Savoie, développé dans : « La Gnomonique » - Les Belles Lettres - méthode n° 1 - page 53

Les valeurs sont calculées au centre du jour, à midi.

Pour les curieux, il est à noter un écart plus grand entre le 28 février et le 1^{er} mars, qui correspond à 1,25 fois l'écart journalier, pour tenir compte du jour supplémentaire tous les 4 ans.

